*Dans le problème, n désigne un entier naturel non nul.*

*Il est possible de traiter les deux parties du problème de façon indépendante.*

## PREMIÈRE PARTIE

1) On considère la série de fonctions numériques de la variable réelle $x$, de terme général $u_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$.

*a)* Étudier la convergence de cette série.

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} .$$

*b)* Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, paire et $2\pi$ — périodique.

*c)* Calculer l'intégrale : $I = \int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

*d)* Calculer, pour $p \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale : $I_p = \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos px\,dx$.

*e)* La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ est-elle le développement de $f$ en série de Fourier?

2) Soit $\alpha \in ]0 ; \pi[$ un réel fixé. Dans cette question et la suivante, on se limite aux valeurs de $x$ du segment $[\alpha ; \pi]$.

*a)* On pose : $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$.

Montrer que la différence : $s_n(x) - \dfrac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$

est une constante que l'on précisera.

En déduire un majorant de $|s_n(x)|$ indépendant de $n$ et de $x \in [\alpha ; \pi]$.

*b)* Montrer que, pour $n \geqslant 2$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \cdot s_k(x) + \frac{s_n(x)}{n}$.

*c)* Justifier la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général :

$$\frac{1}{k(k+1)} \cdot s_k(x),\ k \geqslant 1, \text{ sur le segment } [\alpha ; \pi] .$$

*d)* Montrer la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général :

$$\frac{\sin kx}{k},\ k \geqslant 1, \text{ sur le segment } [\alpha ; \pi] .$$

*e)* Montrer que $f$ est dérivable sur $]0 ; \pi]$ et écrire sa dérivée à l'aide d'une série de fonctions que l'on ne cherchera pas à sommer. Préciser la valeur de $f'(\pi)$.

*f)* La série définissant $f$ est-elle deux fois dérivable terme à terme? En d'autres termes, que peut-on dire de la série de terme général $u_n''(x)$ ?

3) *a)* Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite numérique qui converge vers L . Montrer qu'il en est de même de la suite définie pour $n \geqslant 1$ par : $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n}{n}$ .

*b)* On pose : $\sigma_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$ , et $\Sigma_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sigma_k(x)$ .

$\sigma_n'(x)$ désignant la dérivée de $\sigma_n(x)$ , montrer que la différence :

$\sigma_n'(x) - \dfrac{\sin \dfrac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \dfrac{x}{2}}$ est une constante que l'on précisera.

*c)* Simplifier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right) - \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{(n+2)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ .

*d)* En déduire une expression simple de la dérivée $\Sigma_n'(x)$ . Montrer que la suite de fonctions $\Sigma_n'(x)$ converge uniformément sur $[\alpha ; \pi]$ vers une fonction que l'on précisera.

*e)* Montrer que $f$ est deux fois dérivable sur $]0 ; \pi]$ .

*f)* En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout réel $x$ . Représenter graphiquement la fonction $f$.

4) *a)* Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ .

*b)* Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ , $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ .

(On pourra procéder par intégrations successives de $f(x)$ ).

## SECONDE PARTIE

1) $a$ désignant un paramètre strictement positif, développer en série de Fourier la fonction $f_a$ paire et $2\pi$ — périodique définie pour $x \in [0 ; \pi]$ par :

$$f_a(x) = a^2 (x - \pi)^2 .$$

2) On définit la fonction $h_a$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ h_a(x) = 4a^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + a^2} .$$

Montrer que $h_a$ est continue, paire et $2\pi$ — périodique sur $\mathbb{R}$ .

3) *a)* Écrire $f_a(x) - h_a(x)$ sous la forme de la somme d'une série trigonométrique.

*b)* Montrer que $f_a - h_a$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ .

*c)* Montre que $h_a$ possède une dérivée à droite en $x = 0$ et une dérivée à gauche en $x = \pi$ que l'on précisera.

*d)* Exprimer la dérivée seconde $(f_a - h_a)''$ en fonction de $h_a$ .

*e)* En déduire qu'il existe trois constantes réelles A , B , C telles que, pour $x \in [0 ; \pi]$ :

$$h_a(x) = A.ch(ax) + B.sh(ax) + C .$$

*f)* Déterminer A , B et C .

Fin du problème page 282

T.S.V.P.